УДК 621.926

П.Е. ВАЙТЕХОВИЧ, д-р техн. наук;
В.С. ФРАНЦКЕВИЧ, П.С. ГРЕБЕНЧУК, кандидаты техн. наук; Д.Н. БОРОВСКИЙ
Белорусский государственный технологический университет, г. Минск

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЗАГРУЗКИ В БЫСТРОХОДНЫХ ИЗМЕЛЬЧАЮЩИХ АГРЕГАТАХ

Исследованы основные проблемы современной техники и технологии измельчения материалов, определены ключевые направления развития данной отрасли. Показано, что математическое моделирование движения потоков материала в измельчителях позволяет оптимизировать их конструктивные параметры на стадии проектирования. Приведены примеры математического описания движения потока материала, представленного в виде сыпучей среды, в рабочих органах среднеходных, ударно-центробежных, центробежно-шаровых мельниц. Представлены результаты расчетов основных технологических параметров этих машин с помощью разработанных моделей. Сделаны выводы по возможности использования математических моделей при проектировании центробежных измельчающих агрегатов различных конструкций.

Ключевые слова: *математическое моделирование, диспергирование, планетарная мельница, центробежный измельчающий агрегат, проектирование*

Процессы измельчения материалов широко используются во многих отраслях промышленности. Характерным признаком этих процессов является высокие энергозатраты. По разным источникам, до 10 % производимой в мире электроэнергии затрачивается на измельчение. Единичная мощность измельчающих агрегатов достигает 12 МВт, а удельные энергозатраты превышают 50 кВт·ч/т. В связи с этим во всем мире ведется поиск путей снижения энергетических затрат. Одним из наиболее перспективных направлений для решения указанной задачи следует считать конструктивное совершенствование измельчающих машин с одновременной оптимизацией их технологических параметров. В особенности это относится к движению измельчаемого материала и рабочих органов машин в зоне разрушения.

Основным помольным агрегатом в нашей промышленности остается барабанная (шаровая) мельница, относящаяся с точки зрения механики к тихоходным агрегатам, у которых скорость рабочего органа не превышает 1 м/с. Ее основные недостатки — большая металлоемкость и высокие энергозатраты.

Устранение указанных недостатков возможно за счет повышения интенсивности разрушающего воздействия, достигаемого при увеличении скорости движения, как рабочих органов машин, так и измельчаемого материала. При этом тихоходные измельчающие агрегаты превращаются в средне- и быстроходные. Именно такие агрегаты являются объектами наших исследований. К ним относятся, например, валковые, ударно-центробежные, центробежно-шаровые, планетарные. Основным методом исследования выбрано математическое моделирование. Это обусловлено трудностями, возникающими при экспериментальной проверке работоспособности нового технического решения, определении оптимальных режимов его работы в конкретном технологическом процессе.

Модели машин и их составные части испытывают высокие нагрузки и поэтому должны быть изготовлены из соответствующих конструкционных материалов, обеспечивающих прочность, жесткость, износоустойчивость. Проведение экспериментов требует использования большого количества измельчаемых материалов, их подготовки и утилизации после пробного измельчения. Кроме того, по результатам экспериментов можно определить только обобщающие характеристики процесса. Характер движения материала, сущность самого процесса изучить практически невозможно из-за недоступности зоны разрушения для установки контрольно-измерительной аппаратуры и визуального наблюдения. Поэтому нельзя, например, определить условия соприкосновения материала с рабочим органом в мельницах ударного действия, траекторию движения измельченных частиц в среднеходных мельницах и т. д. Незнание промежуточных характеристик не дает возможности регулировать процесс и устанавливать его оптимальные параметры. Часто в результате такого ограниченного эксперимента, особенно для новых конструкций агрегатов, вообще не удается найти оптимальные режимы работы, и в целом интересные технические решения не доводятся до практической реализации.

Разрешить указанное противоречие можно с помощью моделирования, особенно математического. Правильно составленная математическая модель, учет всех силовых факторов позволяют достоверно описать процесс, избавиться от трудоемкого эксперимента с неизбежными ошибками и неточностями. Возможность широкого использования математического моделирования значительно расширилась при появлении современной вычислительной техники. Сейчас не надо упрощать математические модели до возможности их аналитического решения. Численными методами на компьютере решаются достаточно сложные задачи по описанию процессов в виде дифференциальных уравнений. Причем задачи могут быть многовариантными, в процессе решения легко изменяются все параметры и анализируется результат.

Моделирование позволяет дать качественную и количественную оценку процесса, рассчитать технологические и конструкционные параметры машин. На основе моделирования составляются методики и алгоритмы расчета измельчающих машин. Но математическое моделирование это прежде всего инструмент для поиска конструктивного оптимального решения. Оптимизация конструкции любой машины, в том числе и измельчающей, — вот конечная цель творческого процесса по созданию новых образцов техники. А все современные методы оптимизации базируются на математических моделях.

Рабочим органом большинства исследуемых машин является ротор, основу которого составляет вращающийся диск. Поэтому логично было начать исследование и моделирование движения элементов загрузки по вращающемуся диску.

Вначале рассматривалось движение исходного материала, подаваемого в центр диска, как сыпучей среды. Форма образующей слоя рассчитывалась по уравнению

$$z=\left(f_0+\frac{1}{f_0}\right)\frac{g}{\omega^2\cdot f_0}\ln\left(\frac{g+f_0\omega^2 r_{д}}{g+f_0\omega^2 r}\right)-\frac{r_{д}-r}{f_0}, \qquad (1)$$

где f_0 — коэффициент внутреннего трения материала; ω — угловая скорость диска, рад/с; r — текущий радиус, м; $r_{д}$ — радиус диска, м.

После того, как слой уменьшался до среднего размера частиц, составляющих сыпучую среду, рассматривалось движение одиночных частиц. Но при этом учитывалось взаимодействие между ними посредством введения дополнительной силы взаимного трения. Движение рассматривалось в подвижной полярной системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω. В проекциях на оси координат уравнения движения имеют вид [1]:

$$\begin{cases}\ddot r - r(\dot\varphi)^2 = -f_1 g\cos\psi - 2\omega\nu_d\sin\psi + \omega^2 r - \\ -f_2\left(\omega^2 r\sin\psi - 2\omega\nu_d\right)\cos\varphi; \\ r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi = f_1 g\sin\psi + 2\omega\nu_d\cos\psi - \\ -f_2\left(\omega^2 r\sin\psi - 2\omega\nu_d\right)\sin\varphi, \end{cases} \qquad (2)$$

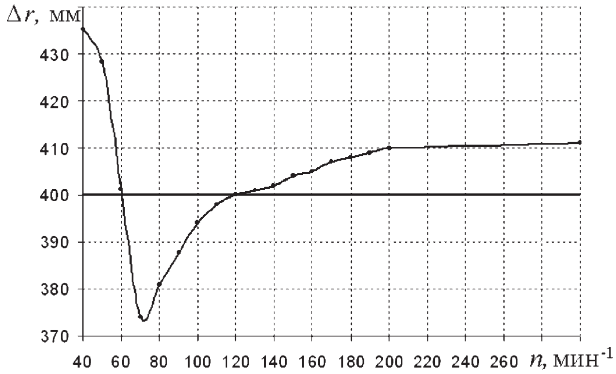

Рисунок 1 — Зависимость радиального перемещения частицы от частоты вращения тарелки

где f_1, f_2 — коэффициенты трения частиц по диску и между собой, соответственно; ψ — угол между относительной скоростью ν_d и ее радиальной составляющей ν_r.

В результате решения полученной системы уравнений удалось построить траекторию движения частиц по диску, определить значения их относительной и полной скоростей. Но самое важное состоит в том, что при использовании данной модели удалось установить условия гарантированного попадания материала под размольные валки в катково-тарельчатых мельницах. Это условие заключается в том, что радиальное перемещение частиц $\Delta r < B$, где B — ширина валка. На рисунке 1 представлен алгоритм реализации данной задачи. Если провести горизонтальную прямую, соответствующую ширине валка, то участок кривой, расположенный под ней, включает диапазон частот с гарантированным попаданием частиц материала под размольный валок.

Система уравнений (2) может быть использована для анализа движения в межлопаточном пространстве скоростных ударно-центробежных измельчителей.

Конструктивной особенностью этих агрегатов является то, что к диску ротора прикреплены криволинейные лопасти, загнутые по ходу вращения. Такая его конструкция обеспечивает залегание материала на внутренней поверхности лопастей и, соответственно, их самофутеровку. Одновременно лопасти накладывают ограничения на движения частиц измельчаемого материала: координаты r и φ жестко связаны их профилем.

Лопасти обычно выполняются в форме логарифмической спирали, которая задается уравнением $r = a^{\varphi}$. С учетом этого движения частиц в межлопаточном пространстве описывается одним уравнением для радиальной координаты (3):

$$\ddot r - \frac{\dot r^2}{r(\ln a)^2} = -f_1 g\frac{\dot r}{\sqrt{(\dot r)^2+\left(\frac{\dot r}{\ln a}\right)^2}} - -2f_2\omega\dot r + \omega^2 r + 2\omega\frac{\dot r}{\ln a}. \qquad (3)$$

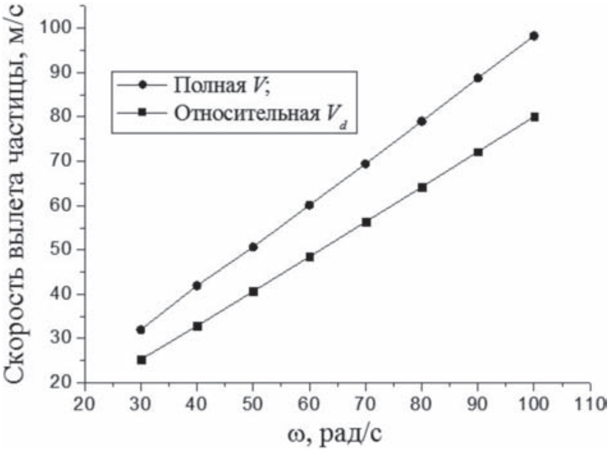

Рисунок 2 — Зависимость скорости вылета частиц от угловой скорости вращения ротора

Решение уравнения численными методами с помощью математического пакета MathCad позволило определить скорость (рисунок 2) и направление движения частиц измельчаемого материала на выходе с ротора. Эти параметры являются определяющими для ударно-центробежных измельчителей.

Уравнением (3) описывается движение одиночных частиц, что допустимо для ударно-центробежных дробилок, которые работают по открытому циклу с размером загружаемого материала 10–60 мм. Мельницы аналогичного типа работают в замкнутом цикле. Размер загружаемого в них продукта менее 10 мм, а циркулируемого — менее 1 мм. Таким образом, материал, проходящий по межлопастному пространству, представляет собой сыпучую среду, в которой необходимо учитывать взаимное влияние частиц на характер движения. Для расчета параметров движения сыпучей среды можно использовать такой же подход как и для жидкости [2]. Для плоского осесимметричного движения, что допустимо в случае небольшой высоты ротора, аналоги уравнения Навье-Стокса и неразрывности в полярной системе координат будут иметь вид:

$$\begin{cases} \nu_r \cdot \dfrac{\partial \nu_r}{\partial r} - \dfrac{\nu_\phi^2}{r} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \upsilon \cdot \left(\dfrac{\partial^2 \nu_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial \nu_r}{\partial r} - \dfrac{\nu_r}{r^2} \right); \\ \nu_r \cdot \dfrac{\partial \nu_\phi}{\partial r} + \dfrac{\nu_r \cdot \nu_\phi}{r} = \upsilon \cdot \left(\dfrac{\partial^2 \nu_\phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial \nu_\phi}{\partial r} - \dfrac{\nu_\phi}{r^2} \right); \\ \dfrac{\partial \nu_r}{\partial z} + \dfrac{\nu_r}{r} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где υ — аналог вязкости сыпучей среды.

Как и в случае с одиночной частицей наличие лопастей позволяет перейти от двухмерной задачи к одномерной, описываемой уравнением:

$$\begin{cases} \nu_r \cdot \dfrac{\partial \nu_r}{\partial r} - r\left(\omega + \dfrac{1}{r \cdot \ln a} \cdot \nu_r \right)^2 = \\ = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial r} + \upsilon \cdot \left(\dfrac{\partial^2 \nu_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial \nu_r}{\partial r} - \dfrac{\nu_r}{r^2} \right); \\ \dfrac{\partial \nu_r}{\partial z} + \dfrac{\nu_r}{r} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

В результате решения этих уравнений также удалось определить скорость и направление движения измельчаемого материала на выходе с ротора.

Более сложным представляется движение загрузки (материала, шаров) в центробежно-шаровой мельнице [3]. Этот агрегат снабжен чашеобразным ротором с плоским днищем, коническим переходным участком и цилиндрической боковой стенкой. Расчетная схема этой мельницы представлена на рисунке 3.

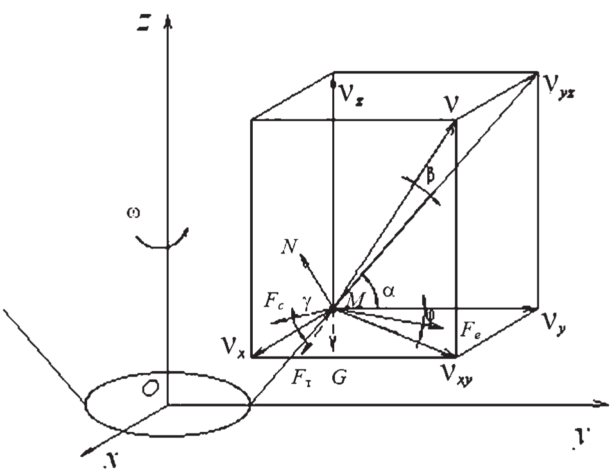

Рисунок 3 — Расчетная схема центробежно-шаровой мельницы

Уравнение относительного движения твердых частиц в проекциях на оси декартовой системы координат для произвольной точки конической поверхности имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\nu_x}{dt} = \omega^2 x + 2\omega\nu_y - \\ -f\left[(\omega^2 y - 2\omega\nu_x)\sin\alpha + g\cos\alpha \right] \dfrac{\nu_x}{\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2}}; \\ \dfrac{d\nu_y}{dt} = \omega^2 y - 2\omega\nu_x - \\ -f\left[(\omega^2 y - 2\omega\nu_x)\sin\alpha + g\cos\alpha \right] \dfrac{\sqrt{\nu_y^2 + \nu_z^2}}{\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2}} \cdot \cos\alpha; \\ \dfrac{d\nu_z}{dt} = -g - f\left[(\omega^2 y - 2\omega\nu_x)\sin\alpha + g\cos\alpha \right] \times \\ \times \dfrac{\sqrt{\nu_y^2 + \nu_z^2}}{\sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 + \nu_z^2}} \cdot \sin\alpha, \end{cases} \tag{6}$$

где f — коэффициент трения частицы (мелющего тела); α — угол наклона образующей конуса.

Эти же уравнения использованы для расчета параметров движения по плоскому диску ($\alpha = 0$) и вертикальным стенкам ($\alpha = 90°$).

Первоначальная математическая модель (6) была усовершенствована. Для учета взаимного вли-

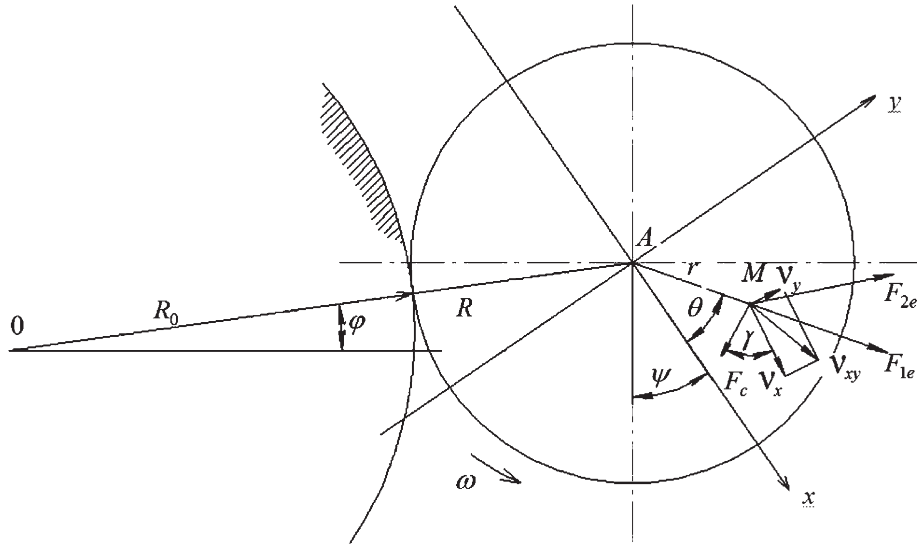

Рисунок 4 — Фрагмент расчетной схемы вертикальной планетарной мельницы

яния движение рассмотрено в виде цепочки шаров и учтены дополнительные силовые факторы: сила давления (подпора), сила тяжести столбика шаров, сила трения между ними.

При реализации этой модели была определена траектория движения и максимально возможная высота подъема шаров и материала по стенкам ротора.

Математическая модель (6) может быть трансформирована в другом направлении — для расчета планетарных мельниц с вертикальной осью вращения [4]. В этом случае подвижную (вращающуюся) систему координат можно связать с центром размольного барабана, а воздействие его переносного движения при повороте водила представить в виде дополнительной инерционной силы, направленной вдоль водила (рисунок 4).

Тогда уравнения, описывающие перемещение тела по конической поверхности барабана, вовлеченного в планетарное движение, преобразуются к виду:

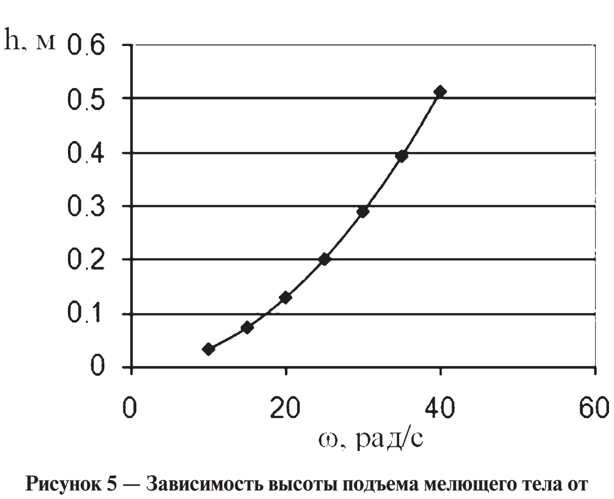

Рисунок 5 — Зависимость высоты подъема мелющего тела от угловой скорости барабана

$$\begin{cases}\dfrac{dv_x}{dt}=\omega^2x+\omega^2R\left(\dfrac{k}{1+k}\right)\cos\left(\dfrac{\omega t}{1+k}\right)-\\ -2\omega v_y-f\left[\tilde{N}\right]\dfrac{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\cos\alpha;\\ \dfrac{dv_y}{dt}=-\omega^2y+\omega^2R\left(\dfrac{k}{1+k}\right)\sin\left(\dfrac{\omega t}{1+k}\right)+\\ +2\omega v_x-f\left[\tilde{N}\right]\dfrac{v_y}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}};\\ \dfrac{dv_z}{dt}-g-f\left[\tilde{N}\right]\dfrac{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}\sin\alpha,\end{cases} \quad (7)$$

где R — радиус барабана, м; $\tilde{N}$ — относительная нормальная реакция связи; k — геометрический критерий.

Причем относительная нормальная реакция определяется по формуле:

$$\tilde{N}=\left[\omega^2E+\omega^2R\left(\frac{k}{1+k}\right)\cos\left(\frac{\omega t}{1+k}\right)-2\omega v_x+g\cos\alpha\right]. \quad (8)$$

Как для центробежно-шаровой мельницы по уравнениям (7) удалось установить траекторию движения мелющих тел по стенкам барабана и максимальную высоту их подъема, рисунок 5.

В процессе составления математической модели для вертикальной планетарной мельницы возникло желание оценить поведение загрузки в целом. Сыпучая среда в размольном барабане была представлена в виде жидкости, что вполне допустимо как и в ударно-центробежном агрегате. Распределение загрузки в этом случае можно определить путем интегрирования уравнений поверхности уровня. Для вращающегося цилиндра, вовлеченного в планетарное движение, с учетом дополнительной переносной инерционной силы уравнение поверхности уровня будет иметь вид:

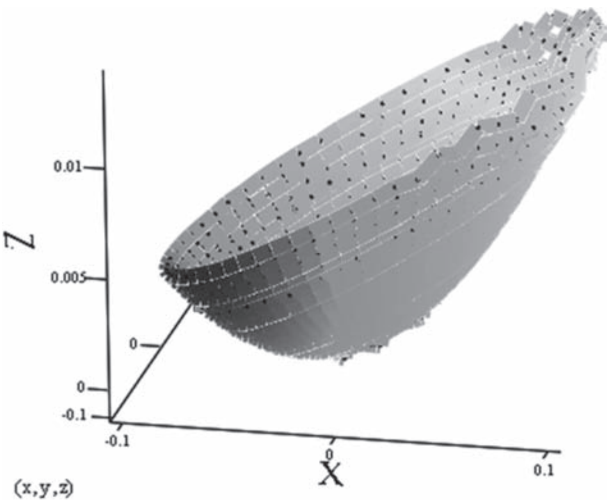

Рисунок 6 — Распределение жидкости в цилиндре

$$\left(\omega^2 x + \omega^2 R\frac{k}{1+k}\right)dx + \omega^2 y dy - g dz = 0. \qquad (9)$$

Интегрирование этого уравнения позволило получить расчетную зависимость для определения осевой координаты (10):

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r}{g}\left(\frac{r}{2} + R\frac{k}{1+k}\cos\theta\right), \qquad (10)$$

где θ — угол между векторами сил F_{1e} и F_{2e}.

Расчеты по уравнению (10) показали, что как и в обычном вращающемся цилиндре сыпучая среда распределяется в виде параболоида, но смещенного по координате z в плоскости действия дополнительной инерционной силы (вдоль водила), рисунок 6.

Таким образом, проведена комплексная работа по составлению математических моделей движения загрузки в различных типах скоростных измельчителей. Модели основаны на законах классической механики, но в большинстве из них учтено взаимодействие между элементами загрузки. С этой целью использованы некоторые положения гидромеханики и механики сыпучей среды. Все модели прошли апробацию и реализованы в виде расчетных алгоритмов с использованием пакетов прикладных программ.

Список литературы

1. Вайтехович, П.Е. Интенсификация и моделирование процессов диспергирования в поле инерционных сил / П.Е. Вайтехович. — Минск: БГТУ. — 2008. — 220 с.
2. Генералов, М.Б. Механика твердых дисперсных сред в процессах химической технологии / М.Б. Генералов. — Калуга: Н. Бочкарево, 2002. — 592 с.
3. Боровский, Д.Н. Учет размера измельчающих тел и их взаимодействия на движение в роторе центробежно-шаровой мельнице / Д.Н. Боровский, П.Е. Вайтехович // Химическая промышленность сегодня. — 2012. — № 5. — С. 40–46.
4. Вайтехович, П.Е. Специфика движения мелющих тел в вертикальной планетарной мельнице / П.Е. Вайтехович, Д.В. Семененко, Д.В. Юхневич // Химическое и нефтегазовое машиностроение. — 2009. — С. 7–10.

Vaitekhovich P.E., Franchkevich V.S., Grebenchyk P.S., Borovsky D.N.
Simulation of loading traffic in a high-speed grinding aggregates

The basic problems of modern technics and technology grinding materials are explored, key areas of the industry are identified. It is shown that mathematical modeling of material flow in the grinders to optimize their design parameters at the design stage. The examples of the mathematical description of the flow of the material presented in the form of a granular medium, in the working bodies of middle-speed, strike-centrifugal, centrifugal ball mills. The results of calculations of the main technological parameters of these machines with the help of developed models are produced. Conclusions on the possibility of using mathematical models in the design of centrifugal grinding method comprising units of various designs are made.

Keywords: *mathematical modeling, dispersion, planetary mill, centrifugal crushing aggregate, designing*

Поступила в редакцию 22.09.2014.